



Серия №2. Поправьте степень!

3 июля

Напоминание. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \text{ где } a_i \geq 0.$$

Примеры

1. Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + \frac{8}{x}$ при $x > 0$.

2. Докажите неравенство для положительных a, b :

$$\frac{a^6 + b^9}{4} \geq 3a^2b^3 - 16$$

Задачи

3. Докажите неравенство при $x > 0$:

$$3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$$

4. Пусть $a, b, c > 0$ и $a + b + c = 6$. Докажите неравенство:

$$\frac{a^3}{a^4 + 1} + \frac{6b^2}{b^3 + 16} + \frac{54c^2}{c^4 + 243} \leq 3$$

5. Докажите неравенство:

$$x^8 + y^4 + 1 \geq x^2y(x^2 + y + 1)$$

6. Пусть n и k натуральны, $n > k$, $a > 0$. Докажите неравенство:

$$na^k - ka^n \leq n - k$$

7. Найдите наибольшее значение выражения $x^p y^q$, где p, q – натуральные числа, а x, y – положительные числа и $x + y = a$.

В следующих трёх задачах числа a, b, c – положительные.

8. Пусть $a + b + c = 1$. Докажите неравенство:

$$\frac{a}{a^2 + b^3 + c^3} + \frac{b}{b^2 + c^3 + a^3} + \frac{c}{c^2 + a^3 + b^3} \leq \frac{1}{5abc}$$

9. Пусть $a + b + c = 3$. Докажите неравенство:

$$\frac{a}{a^3 + b^2 + c} + \frac{b}{b^3 + c^2 + a} + \frac{c}{c^3 + a^2 + b} \leq 1$$

10. Пусть $a + b + c = 3$. Докажите неравенство:

$$2\sqrt{a + \sqrt{b}} + 2\sqrt{b + \sqrt{c}} + 2\sqrt{c + \sqrt{a}} \leq \sqrt{8 + a - b} + \sqrt{8 + b - c} + \sqrt{8 + c - a}$$